Thin position of manifolds

小沢 誠（早稲田大学教育学部）

平成 11 年 7 月 27 日

1 一般論

M ： smooth orientable manifold
$h : M \to \mathcal{R}$ or I ： Morse function
$c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ ： critical values of h とする。
各 i $(i = 1, \ldots, n-1)$ に対して、

$$c_i < r_i < c_{i+1}$$

を満たすように regular value を選ぶ。
$f : \{M \cap h^{-1}(r_i)\} \to \mathcal{Z}$ を固定した適当な写像とする。
h の *width* を

$$w(h) = \sum_i f(M \cap h^{-1}(r_i))$$

で、M の *width* を

$$w(M) = min_h\{w(h)\}$$

で定め、$w(M)$ を与える h を *thin position* という。
$f(M \cap h^{-1}(r_i)) =: f(r_i)$ と略記する。

$$f(r_{i-1}) < f(r_i),\ f(r_i) > f(r_{i+1})$$

なる r_i を *thick level*、

$$f(r_{i-1}) > f(r_i),\ f(r_i) < f(r_{i+1})$$

なる r_i を *thin level* という。

例. $M = T^2$ とし、$f : \{M \cap h^{-1}(r_i)\} \to \mathcal{Z}$ を

$$f(M \cap h^{-1}(r_i)) = (M \cap h^{-1}(r_i) \text{ の成分数 })$$

で定める。このとき、M の width は 4 である。

2　３次元多様体の Thin position

この章では、文献 [18] を元に３次元多様体の thin position について述べる。

M ： connected closed orientable 3-manifold とする。

M はハンドル分解

$$M = b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup N_2 \cup T_2 \cup \cdots \cup N_k \cup T_k \cup b_3$$
$$\begin{aligned} b_0 &: \text{0-handles} \\ N_i &: \text{1-handles} \\ T_i &: \text{2-handles} \\ b_3 &: \text{3-handles} \end{aligned}$$

を持つ。

$S_i = \partial(b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup \cdots \cup N_i) - (\text{spheres bounding 0- or 3-handles})$
$F_i = \partial(b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup \cdots \cup N_i \cup T_i) - (\text{spheres bounding 0- or 3-handles})$
$W_i = (\text{collar of } F_{i-1}) \cup N_i \cup T_i \cup (\text{0- and 3-handles incident to } N_i \text{ or } T_i)$
$\bar{N}_i = (\text{0-handles}) \cup (\text{collar of } F_{i-1}) \cup N_i$
$\bar{T}_i = (\text{collar of } S_i) \cup T_i \cup (\text{3-handles})$

と置くと、S_i は W_i の Heegaard splitting

$$W_i = \bar{N}_i \cup_{S_i} \bar{T}_i$$

を与える。

次に、第１章での写像 “f” を定義する。

S ： closed connected orientable surface に対して、

$$c(S) = \begin{cases} 1 - \chi(S) = 2g(S) - 1 & \text{if } S \neq S^2 \\ 0 & \text{if } S = S^2 \end{cases}$$

と定める。connected でない S に対しては、

$$c(S) = \sum \{c(S') | S' \text{ is a component of } S\}$$

と定義する。

M のハンドル分解の *width* を

$$\{c(S_i) | 1 \leq i \leq k\}$$

で定める。

width の order は、まず大きい順に並べ、そして先頭から大小を比較する。

例. $\{3,3,5,3,2,1\} < \{2,2,5,3,4\}$ である。何故なら、$[5,3,3,3,2,1]$、$[5,4,3,2,2]$ と並べた時、$5=5$ であるが、次の数を比較すると、 $3<4$ だからである。

M の *width* $w(M)$ を全てのハンドル分解において、この order で最小のものと定める。

例. $M=$ (lens space)#(lens space) とする。M は genus 2 の Heegaard splitting を持ち、このハンドル分解の width は

$$\{c(\text{genus 2 surface})\}=\{3\}$$

である。しかし、ハンドルの順序を入れ換えて、

$$(\text{0-handle})\cup(\text{1-handle})\cup(\text{2-handle})\cup(\text{1-handle})\cup(\text{2-handle})\cup(\text{3-handle})$$

と出来る。このハンドル分解の width は

$$\{1,1\}$$

である。実際、M の width は $\{1,1\}$ であることが分かる。

注意. 一般に、 $w(M_1\#M_2)=w(M_1)\cup w(M_2)$ が成り立つ。

thin position において、次の規則１～７が成立する。

規則 1. F_i の sphere 成分は、essential である。
∵）仮に、F_i のある成分で inessential sphere が存在したとすると、それは 1-handles と 2-handles を含む 3-ball を bound する。（F_i から 0- or 3-handle を bound する sphere を除いているからである。）その ball を 0- or 3-handle に置き換えると width が減る。□

規則 2. F_{i-1} の各成分は F_i に継続されるか、又は、N_i と T_i の両方から付着される handles を持つ。
∵）仮に、F_{i-1} の成分で 1-handle が付着せず、T_i のある 2-handles が付着するものが存在したとする（つまり、その成分は S_i に継続される）と、その分解はそれらの 2-handles を T_{i-1} の一部と見なすことでより thin に出来る。同様に、もし F_{i-1} の成分で N_i の 1-handles が付着し、T_i の 2-handle が付着しないものが存在したとすると、その分解はそれらの 1-handles を N_{i+1} の一部と見なすことでより thin に出来る。□

定義. S_i が W_i の Heegaard splitting を与えていたことを思い出そう。この Heegaard splitting が *weakly reducible* [2] であるとは、essential disks $D_N\subset\bar{N}_i$ と $D_T\subset\bar{T}_i$ が存在して、S_i において $\partial D_N\cap\partial D_T=\emptyset$ を満たすときをいう。特に、もし W_i が 1-handle をある成分に持ち、2-handle を他の成分に持つならば、W_i は自動的に weakly reducible である。

規則 3. W_i は weakly reducible ではない。
注. weakly reducible でない状態を *strongly irreducible* という。

∵）W_i が weakly reducible と仮定する。$\bar{N}_i$ から D_N の近傍を取り除き、一つ少ない 1-handle を持つ compression body か、又は、一つ以上の成分を持つ compression body に変える。そして、芯 D_T を持つ 2-handle を N' に取り付ける。次に、D_N に相対する 1-handle を残りの 2-handles の後に取り付ける。これにより、整数 $\{c(S_i)\}$ を持っていた元の分解は、S_i をそれぞれ ∂D_N と ∂D_T に沿って S_i を compression して得られる 2 枚の surfaces S_{i-} と S_{i+} による分解に置き換えられる。$c(S_{i\pm}) < c(S_i)$ であるから、新しい分解はより thin である。□

規則 4. N_i と T_i の全ての handles は、S_i の *active* 成分と呼ばれる同一の成分、に付着する。

∵）そうでなければ、W_i は 1-handles と 2-handles を両方持つ 2 つの成分を含み、W_i は weakly reducible になってしまう。

例. S が M の weakly reducible Heegaard spitting の splitting surface ならば、$width(M) < \{c(S)\}$。

補題. $\partial W_i = F_{i-1} \cup F_i$ が W_i 内で compressible ならば、W_i は weakly reducible である。

∵）[2, Lemma 1.1] ：*Let* (W, W') *be a Heegaard splitting of* $(M; B, B')$*. Let* $(S, \partial S) \subset (M, B \cup B')$ *be a disjoint union of essential 2-spheres and disks. Then there exists a disjoint union of essential 2-spheres and disks* S^* *in* M *such that*

(i) S^* *is obtained from* S *by ambient 1-surgery and isotopy;*

(ii) each component of S^* *meets* F *in a single circle;*

(iii) there exist complete disk systems $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ *for* W, W' *respectively such that* $\mathcal{D} \cap S^* = \mathcal{D}' \cap S^* = \emptyset$*.*

において、S を $\partial W_i = F_{i-1} \cup F_i$ の W_i 内の compressing disk とすると、(iii) により、weakly reducing disks pair が存在する。□

規則 5. F_i の各成分は M 内で incompressible。

∵）D を F_i のある成分の compressing disk とする。$F = \cup F_i$ と置く。$D \cap F$ についての innermost disk argument により、$D \cap F = \partial D \subset F_i$ と仮定出来るので、D は W_i か又は W_{i+1}（仮に W_i とする）の内部に完全に含まれる。補題により、W_i は weakly reducible となり、規則 3 に反する。□

定義. 3 次元多様体 M 内の separating surface S が *weakly incompressible* であるとは、S の反対側にある任意の 2 つの compressing disks がそれらの境界で交わるときをいう。

規則 6. 各 surface S_i は weakly incompressible。

$\because$）規則5により F は incompressibleであるので、S_i の任意の compressing disk は W_i に含まれると仮定出来る。故に、もし S_i が weakly incompressible でなければ、W_i は weakly reducible となり、規則3に反する。$\square$

規則 7. M が irreducibleで lens space でなければ、任意の S_i の成分は torus ではない。特に、$w(M)$ にある数は3より小さい。

$\because$）C をある S_i の torus 成分と仮定する。M は lens space ではないから、分解は Heegaard splitting ではない。よって、$k > 1$ と仮定し、一般性を失うこと無く C は S_i の active 成分であると仮定する。W を、C を含む W_i の成分とする。このとき、$\partial W \subset F$ は空でない spheres の集まりである。（S_i は Heegaard splitting でないから。）規則1により、F のこのような sphere 成分は essential であるが、これは M が irreducible であるから不可能である。$\square$

これらの規則から、次の系が得られる。

系. g を M の Heegaard genus とする。もし M が irreducible で、genus$< g$ の incompressible surface を含まないならば、M の minimal genus Heegaard splitting は thin decomposition である。故に $w(M) = \{2g - 1\}$。

注. 特に、M が irreducible で non-Haken ならば系は成立する。

3 結び目の Thin position

S^3 内の knot K に対して、Gabai と Thurston は次のように thin position を定めた（[4]）。

$h : S^3 - \{\pm\infty\} = S^2 \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ を projection で、$h|_K$ が Morse function になるものとする。

$c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ ： critical values of h とする。

各 i $(i = 1, \ldots, n-1)$ に対して、

$$c_i < r_i < c_{i+1}$$

を満たすように regular value を選ぶ。

$f : \{M \cap h^{-1}(r_i)\} \to \mathcal{Z}$ を

$$f(K \cap h^{-1}(r_i)) = |K \cap h^{-1}(r_i)|$$

で定める。

h の *width* を

$$w(h) = \sum_i f(K \cap h^{-1}(r_i))$$

で、K の *width* を

$$w(K) = min\{w(h)\}$$

で定める。ここで、min は K の ambient isotopy で取る。$w(K)$ を与える K の位置を *thin position* という。

$f(K \cap h^{-1}(r_i)) =: f(r_i)$ と略記する。

$$f(r_{i-1}) < f(r_i),\ f(r_i) > f(r_{i+1})$$

なる r_i を *thick sphere*、

$$f(r_{i-1}) > f(r_i),\ f(r_i) < f(r_{i+1})$$

なる r_i を *thin sphere* という。

Gabai は [4] で knot の thin position を使い、次の結果を得ている。

補題（[4, Lemma 4.4], 1987）. K が thin position にあるとする。P を $S^3 - \mathrm{int}N(K)$ に proper に埋め込まれた surface で、∂P は meridian の和でないとする。このとき、P を isotop して、level sphere Q で P と transverse に交わり、$Q \cap P$ の各 arc 成分が P 内で essential であるものが存在する。

もし P が boundary incompressible（resp. incompressible）ならば、$P \cap Q$ の各 arc（resp. loop）成分は $Q - \mathrm{int}N(K)$ で essential と出来る。

この補題の利点は、タングル分解を持たない結び目に対しても、non-meridionally boundary を持つ曲面を本質的に level surface と交わるようにすることが出来ることにある。Gordon-Luecke は、[5] で Gabai の補題を更に拡張している。

命題（[5, Proposition 1], 1989）. K を S^3 内の non-trivial knot とし、γ を meridional slope とする。non-trivial Dehn surgery で $K(\pi)$ $(\pi \neq \gamma)$ が S^3 に同相になったとする。このとき、$E(K)$ 内に proper に埋め込まれた planar surfaces P、Q が存在して、

(i) ∂P （resp. ∂Q）は π（resp. γ）の parallel copies から成る。

(ii) P と Q は transverse に交わり、∂P の各成分は ∂Q の各成分と $\Delta(\pi, \gamma)$ 個の点で交わる。

(iii) $P \cap Q$ の arc 成分は、P でも Q でも essential である。

Gordon-Luecke は、この命題での P、Q を用いてグラフを構成し、Q が thin position における level sphere だった場合、$K(\pi)$ が lens space を connected summand に持つことを示している。この帰結として、S^3 内の non-trivial knot の non-trivial Dehn surgery では、S^3 は得られないことを示し、補空間予想を解決している。

Thompson は [22] で、タングル分解を持たない結び目に関しては thin position と bridge position が一致することを示している。

定理（[22, Theorem 1]）. K が thin position にあるとする。このとき、次のいずれかが成り立つ。

(1) $S^3 - \mathrm{int}N(K)$ 内に meridional boundary を持つ essential planar surface が存在する。（つまり、K はタングル分解を持つ。）

(2) K は h に関して bridge position にある。

[9]、[10]、[11] では、Thompson の定理を更に拡張した結果を得ている。

Thin position において、thin sphere は 2 章での F_i に相当する。規則 5 が、thin sphere に対しても成立するか否かは気になるところであるが、未だ分かっていない。

問題. K が thin position にあるとする。このとき、全ての thin spheres は K のタングル分解を与える。

注. [9] で、最も上の（resp. 下の）thin sphere は、K の補空間において上側に（resp. 下側に）incompressible であることが示されている。

参考文献

[1] D. Bachman, *Heegaard splittings with boundary and almost normal surfaces*, preprint, available in http://xxx.lanl.gov/abs/math.GT/9806019, 4 Jun 1998.

[2] A. J. Casson and C. McA. Gordon, *Reducing Heegaard splittings*, Topology and its Appli. **27** (1987) 275-283.

[3] H. Doll, *A generalized bridge number for links in 3-manifolds*, Math. Ann.

[4] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds. III*, J. Differential Geometry **26** (1987) 479-536.

[5] C. McA. Gordon and J. Luecke *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc.

[6] C. Hayashi and K. Shimokawa *Thin position for 1-submanifold in 3-manifold*, preprint.

[7] D. J. Heath, *On classification of Heegaard splittings and triangulations*, Pacific J. Math. **178** (1997) 241-264.

[8] D. J. Heath, *Heegaard splittings of the figure-8 knot complement are standard*, preprint.

[9] D. J. Heath and T. Kobayashi, *Essential tangle decomposition from thin position of a link*, Pacific J. Math. **179** (1997) 101-117.

[10] D. J. Heath and T. Kobayashi, *A search method for a thin position of a link*, preprint.

[11] D. J. Heath and T. Kobayashi, *Locally thin position for a link*, preprint.

[12] M. Lustig and Y. Moriah, *Closed incompressible surfaces in complements of wide knots and links*, Topology and its Appli. **92** (1999) 1-13.

[13] Y. Moriah, *Incompressible surfaces and connected sum of knots*, J. Knot Theory and Its Ramifi. **7** (1998) 955-965.

[14] M. Scharlemann, *Sutured manifolds and generalized Thurston norms*, J. Differential Geometry **29** (1989) 557-614.

[15] M. Scharlemann, *Local detection of strongly irreducible Heegaard splittings*, Topology and its Applications **90** (1998) 135-147.

[16] M. Scharlemann, *Heegaard splittings of compact 3-manifolds*, Handbook of Geometric Topology.

[17] M. Scharlemann and J. Schultens, *Comparing Heegaard and JSJ structures of orientable 3-manifolds*, preprint.

[18] M. Scharlemann and A. Thompson, *Thin position for 3-manifolds*, Contemporary Math. **164** (1994) 231-238.

[19] M. Scharlemann and A. Thompson, *Heegaard splittings of (surface)$\times I$ are standard*, Math. Ann. **295** (1993) 549-564.

[20] M. Scharlemann and A. Thompson, *Thin position and Heegaard splittings of the 3-sphere*, J. Differential Geometry **39** (1994) 343-357.

[21] J. Shultens, *The classification of Heegaard splittings for (closed orientable surfaces)$\times S^1$*, Proc. London Math. Soc. **67** (1993) 401-487.

[22] A. Thompson, *Thin position and bridge number for knots in the 3-sphere*, Topology **36** (1997) 505-507.

[23] A. Thompson, *Thin position and the recognition problem for S^3*, Math. Research Letters **1** (1994) 613-630.