結び目と曲面

小沢　誠

総合教育研究部自然科学部門の小沢と申します。この度はこのような場で講演をさせていただくことになりまして、大変光栄に思っております。本日は「結び目と曲面」というタイトルでお話しいたします。

まず、結び目ですが、ここで紐を結んでみますと色々な形ができると思います。ただ、その紐の端点をくっ付けて一つの輪っかにします。これを結び目といいます。紐には色々な結び方がありますので端点を閉じることで色々な結び目の形ができます。ここの図で出ているのが最も単純な結び目になりまして、左側が左手系の三葉結び目、右側が右手系の三葉結び目になります（図1）。これは、ちょうど鏡で映すとそれぞれ映り合うような関係になっております。

結び目理論ではどのようなことをするかというと、色々な形の結び目がありますので、それを空間の中で動かして移り合うかどうか、与えられた二つの結び目が変形して移り合うかどうか、または移り合わないかどうか、それを判定するのが結び目理論となります。

ここで出ているのが結び目の表で、これは交点によって少ない交点からどんどん分類がされております（図2）。たとえばこの、3_1というのがさきほど出てきた三葉結び目で、上から、この表示でみますと3交点ありますので3_1ということで、だんだん交点数が6とか7になり、どんどん交点数が増えております。現在まで、16交点まで分類がされております。ただ、それだけではなくて結び目には無限に多くの結び目が存在します。これはごく一部の表になります。この結び目と曲面との関わりについてお話しします。

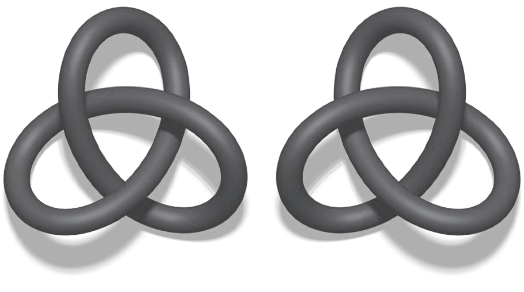

図1　左手系三葉結び目と右手系三葉結び目

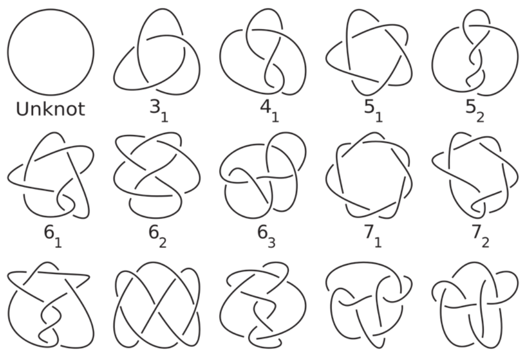

図2　結び目の表

曲面とは何か。これは空間でありまして、各点の周りでは二次元のユークリッド空間、つまり平面ですね。各点、たとえばこの辺に自分がいると考えると、自分の周りは平面であると、平らであるという感じです。ところがこれ、全体として見ますと、このようなトーラス、ドーナツ型になっているという場合です（図3）。こういったものを曲面といいます。曲面については左側がトーラス、右側がクラインの壺といいまして、この違いですが、トーラスは表裏がついているのですね。トーラスの、この目に見える方が表、内側が裏だとすると、表と裏の区別がつきます。ただ、しかしながらクラインの壺、右側の曲面については、表に歩いているとしても、ところが歩いていてずっと一周していくと裏側に行ってしまう。ということで、表と裏を自由に行き来しますので、結局表と裏の区別がつきません。これは左側が向き付け可能、右側が向き付け不可能といいます。向き付けが出来るか出来ないかで区別します。

図3　トーラスとクラインの壺

曲面については分類がされておりまして、向き付け可能なものか不可能なもので大きく二つに分類されます。あとは種数、このように穴の数ですね。あとは、この曲面に穴をあけると境界ができます。その境界数。向き付け可能か、種数の数か、境界数で曲面が全て分類されています。

次に結び目と曲面との関わりですが、古くから調べられているのがSeifert曲面というもので、任意の結び目はSeifert曲面を張るということが、一九三四年に示されております。Seifert曲面というのは、曲面であって、連結な曲面、くっついた曲面で、境界が結び目となっているようなものであります。左側のここが縁なのですが、三葉結び目に対して曲面が張れていると、曲面の縁がちょうど結び目になっております（図4）。右側はちょっと分かりにくいのですが、ちょうど、二重になっていまして、手前の三角形と奥側の三角形で、ちょっと捻ったバンドがくっついて、またここでも一つの曲面となっております。よく見ますと左側は表裏の区別がつきません。表裏表と来ると裏になる。表裏、区別がつきません。これは、メビウスの帯といわれているものです。右側はよく見ますと表と裏の区別がつきます。右側の曲面、ちょっと分かりにくいのですが、実は先ほど出てきたトーラスに穴を一個開けたもの、境界が一つあるトーラスの変形されたものになっております。一般的には、Seifert曲面というのは右側のような向き付け可能なものしか考えません。ただ、ここの講演では向き付け不可能なものも仲間に入れてSeifert曲面として呼ぶことにします。

結び目の中では特殊なクラスとしてトーラス結び目があり、これはトーラスの上に、表面に乗っているような図です（図5）。ここでは、このトーラスは（3，−8）型トーラス結び目となります。これは、三

回ロンジチュード方向に回っていまして、八回メリディアン方向に、逆回りしていますので、（3，−8）型トーラス結び目となります。

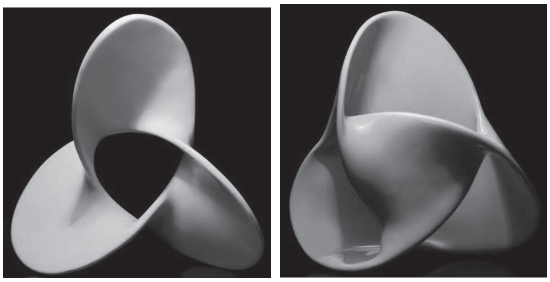

図４　Seifert曲面

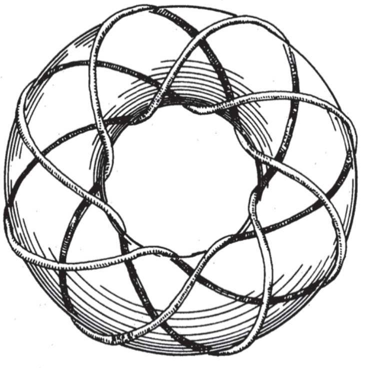

図５　（3，−8）型トーラス結び目

あとは、サテライト結び目というクラスがあります。これは一つ結び目がありますとそれの近傍を太らせて、その中にさらに結び目を作ることができます（図６）。このような結び目、これは、八の字結び目といいまして、それをコンパニオンとして持つサテライト結び目ということになります。サテライト結び目についての特徴としては、その外部にトーラスがあることです。もともとの八の字結び目に沿って作られた結び目なので、トーラスを含んでいるということになります。

次に合成結び目。これは二つ結び目があったときにくっつけてできるような結び目が合成結び目となります（図７）。先ほどの左手系と右手系の三葉結び目をくっつけてできた結び目です。一九四九年Schubertによって証明されたことが、非自明な結び目は、素な結び目の連結和に分解される、一意的に分解されるという定理です。これは、自然数が素数の積に一意的に分解されるという定理がありますが、それに対応して結び目についても同様の定理があります。

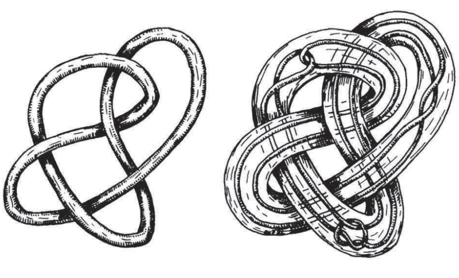

図６　八の字結び目とサテライト結び目

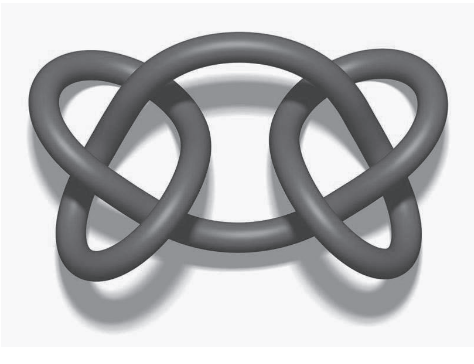

図７　本結び（Square knot）

次にタングル分解球面。これは、左側が樹下―寺阪結び目、右側がConway結び目といいます（図８）。ここでは、このように、この結び目と四点で交わる球面が存在しています。円になっていますが球面と思ってください。この球面に含まれているものがタングルというものになります。このタングルを一八〇度反転、回転させると、ちょうどConway結び目になります。これら二つの結び目はミュータントと呼びます。ミュータントの結び目については、非常に似た性質がありまして、多項式不変量や、あとは双曲体積、これらが一致することが知られております。

ここで、結び目と曲面との関係をまとめてみますと、大きく四種類

に分類されます（図９）。まずは閉曲面。ここで太い線が結び目でそれぞれが交わらないような曲面です。これは、先ほど出てきたサテライト結び目とトーラスの関係、結び目とぶつからない曲面ですね。右上に来ましてタングル分解曲面。これは、縦の線が結び目と思っていただきまして、この平面が曲面。結び目と横断的に交わるような曲面、これがタングル分解曲面になります。例としましては先ほど出てきた合成結び目、これは結び目と二点で交わる球面がありますので、それもタングル分解曲面です。先ほどの樹下－寺阪結び目とConway結び目に対してもタングル分解球面があります。あと、左側下を見ますと、Seifert曲面。これは、境界が結び目となっているような曲面です。あと右下に来ますとコイル曲面、これは曲面の上に結び目が含まれていると。トーラス結び目が典型的な例でした。大きく四つに分類されます。

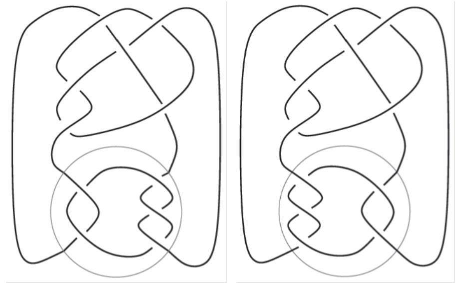

図８　樹下－寺阪結び目とConway結び目

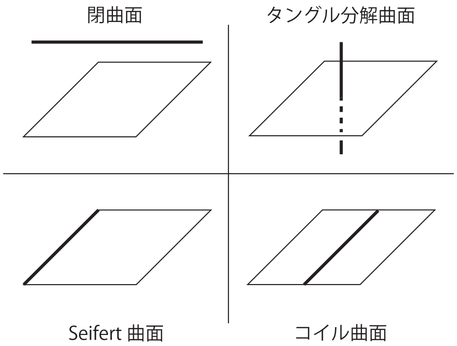

図９　結び目と曲面の関係

他にも考えることは出来まして、例えば結び目に対してこのように何重にも曲面が接続してくると（図10）。こういったものを分岐曲面と呼んでいますが、このような分岐曲面はここでは考えません。

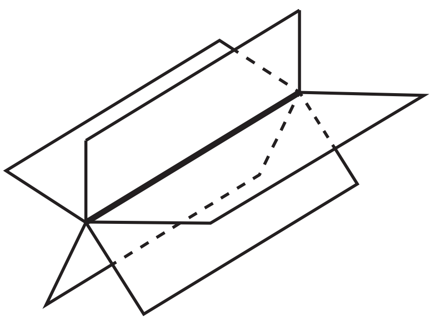

図10　分岐曲面

それらの今の四種類の分類に対して、次の定理が知られております。タングル分解曲面が存在する場合は、結び目と交わらない閉曲面が存在する。ということで、右上のタングル分解曲面があるとしますと、必ず閉曲面が存在します。これは、どのように見るかといいますと分解球面がありますので、そこでチュービングという操作をします。ここで穴を開けて、結び目に沿ってチューブを付けると。そうすると穴のところがなくなって、チューブでふたがされまして閉曲面になりますね。結び目とぶつからない曲面ができます。

また、先ほどの四種類の中ではSeifert曲面が存在すれば、コイル曲面が存在するという関係がございます。この見方としては、真ん中のメビウスの帯を太らせて、膨らませると、その表面を見ますとトーラスができます（図11）。これでコイル曲面ができます。ここでちょっと注意したいのは、向き付け不可能な曲面から太らせてコイル曲面、右側の曲面を作りますと、そのコイル曲面上では、結び目は非分離的になります。曲面で結び目に沿って曲面を切った場合は、分かれない、分離しないという性質になります。

これも同じことですが、Seifert曲面が存在、ただ、ここでは向き付け可能な場合のSeifert曲面を考えます。向き付け可能な場合は表裏がありますので、太らせて近傍を作って、その境界を見ますと必ず表裏がありますので、一番右側の曲面、こういう曲面上では、結び目は分離的になります（図12）。必ずその曲面を二つに分けるという性質になります。

今のような関係があるのですが、一般的には一つの結び目に対して無限個の曲面が存在します。このような結び目を、プレッツェル結び目といいます（図13）。これを真ん中のところを捻じって、右側の結び目ができます。これは、同じ結び目です。空間の中で捻じったので同じ結び目です。ですが、左側の結び目で自然に張ったSeifert曲面と、右側の結び目で変形した後で自然に張ったSeifert曲面、これらは違うSeifert曲面になっております。この要領で作りますと、どんどん捻ってSeifert曲面を張って行きますと、無限個のSeifert曲面を作ることができます。

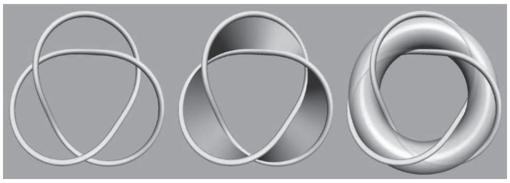

図11　メビウスの帯とコイル曲面

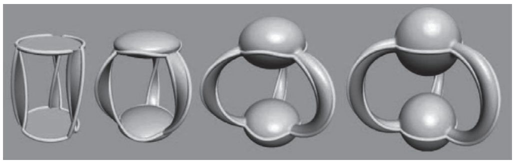

図12　Seifert曲面とコイル曲面

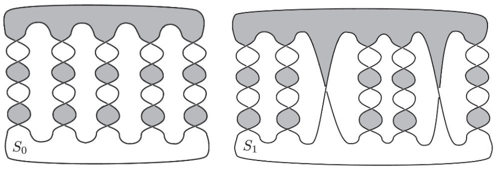

図13　プレッツェル結び目とSeifert曲面

このように無限個あるのですが実際には有限個で抑えることができます。これは一九六一年Hakenによって証明されたことで、有限個の基本曲面と呼ばれるものが存在して、任意の圧縮不可能曲面、ちょっとこの言葉の定義は省略しますが、これはHaken和で表されることになっています（図14）。二つの曲面、FとGがあった場合に和をとります。F＋G、これは、断面図ですが、交わりを解消して、一つの曲面を作るという、これを足し算、Haken和といいます。これによって、有限個の曲面からHaken和で任意の曲面を作ることができます。そういうことで、原則的には、基本曲面、有限個の基本曲面で全部理解できると。

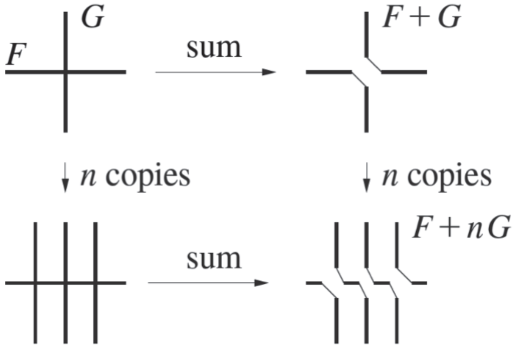

図14　Haken和

これはどこに理由があるかというと、三次元のこの我々が住んでい

る空間とは四面体に分割できるのですね。三角形分割といいまして、こまかく四面体で我々が住んでいる三次元の空間を分割できます。したがって結び目に対しても、有限個の四面体に分割できますので、原理的には有限の世界になるのですね。この三次元までは三角形分割ができるのですが、四次元以上の空間では、三角形分割ができないものがあります。

結び目理論でどのような問題があるかということですが、まだ今のところ解けていない問題で私が重要だと考えている未解決予想がこれらになります。ただですね、ここの二番目のNakanishi conjectureというものが、先月五月十七日に解かれたというニュースを聞きまして、非常にびっくりしたのですが、このようにですね、数学というのは予想の解決に向けて、皆で頑張って進めていく学問なのですが、このように、非常に最近でも進展があるような分野になります。私が特に考えているのが一番下のNeuwirth conjectureというものになります。Neuwirth予想というのは、任意の非自明の結び目に対して、それを非分離的に含むコイル曲面が存在するということです。わたしが確認した上では、十一交点まではこの二つの結び目以外すべてNeuwirth予想を満たすことを確認しました(図15)。残り二つなんですね。ただ、ここまではちょっとまだ力が及ばず、この二個に対してはNeuwirth予想を満たすことは分かっていません。

このNeuwirth予想をもうちょっと強めたStrong Neuwirth予想というのがありまして、これは、任意のトーラス結び目でない素な結び目は、向き付け不可能なSeifert曲面を張る、と。これは、向き付け不可能なSeifert曲面を張れば、コイル曲面ができましてNeuwirth予想を満たすと。ですが、これも非常に最近、二〇一五年Dunfieldによって反例があることが分かりました。これはコンピュータを使って確認されております。この結び目なんですが、トーラス結び目に非常に近いツイステッドトーラス結び目というもので、トーラス結び目の一部を捻ってできるような結び目となります(図16)。このツイステッドトーラス結び目については、向き付け不可能なSeifert曲面は張らない、存在しないということがコンピュータを使って示されています。これは先ほど申し上げました原理、三角形分割、即ち有限個の四面体に分割できますので、コンピュータに乗っちゃうんですね。コンピュータで計算可能となってしまっていると。それをDunfieldがコンピュータプログラムで示しました。

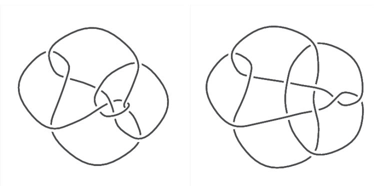

図15　K11n118とK11n126

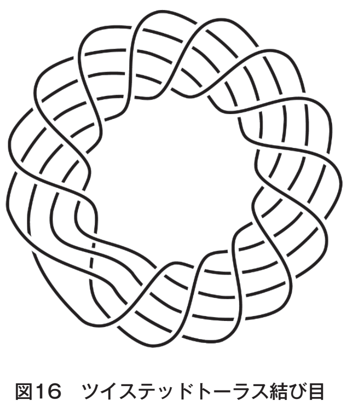

図16　ツイステッドトーラス結び目

これは何かといいますと、結び目全体の見取り図のようなもので、数学でHasse図というものになります（図17）。ここで一番下のtorusというのは、トーラス結び目です。その上で色んな結び目のクラスがあるのですが、上にあるものがその下にあるクラスを含んでいると。上にあればあるほどより広いクラスになっていきます。それの見取り図を描いたものになります。ここで点線で示しているのが、まだ分かっ

ていないところです。私の目論見というか目標としましては、この点線を頑張って示して最終的にNeuwirth、一番トップですね。Neuwirthに含めたい。つまりすべての非自明な結び目はNeuwirth予想を満たすということころを目標としております。

最近の結果をご紹介しますと、このような閉偽曲面というものがあります（図18）。これ、曲面ではありません、曲面に対して二つ、上と下からまた曲面がくっついているようなものになります。このような曲面に対して操作、右のような曲面を作ります。そうするとF_vとF_hという二つの曲面を構成することができます。ここで、もしF_vの方が向き付け不可能な場合は、それの近傍をとって、その境界をとることでNeuwirth予想を満たすことは分かると。もしF_vが向き付け可能だった場合はF_hの方がコイル曲面になることが分かると。いずれにせよ、F_vかF_h、いずれかはNeuwirth予想を満たす曲面になることを二〇一五年に示しました。今の所、この方法を使ってなんとかNeuwirth予想の解決に向かって努力する次第でございます。

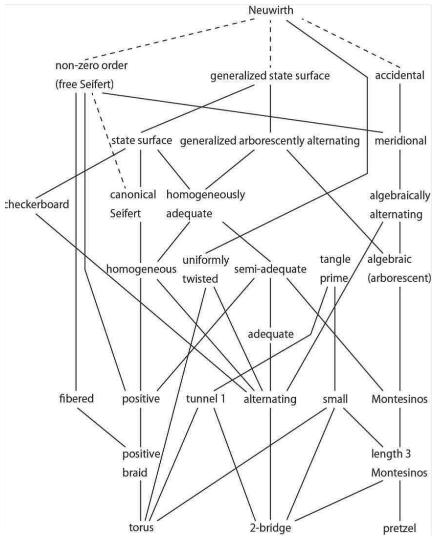

図17　Hasse図

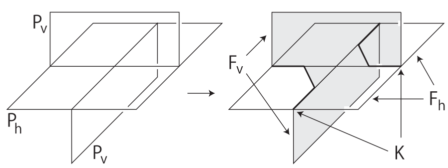

図18　閉偽曲面の＋平滑化

以上になります。

引用文献

図1、図4：Trefoil knot – Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Trefoil_knot

図2：Knot theory – Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory

図3：Torus – Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Torus Klein bottle – Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle

図5、図6：W. P. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357-381.

図7：Square knot (mathematics) – Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Square_knot_(mathematics)

図8：J. E. Greene, Conway mutation and alternating links, Proceedings of 18th Gökova Geometry-Topology Conference, pp. 31-41.

図11、図12：J. J. van Wijk and A. M. Cohen, Visualization of the Genus of Knots, Visualization, 2005. VIS 05. IEEE

図13：R. T. Wilson, Knots with infinitely many incompressible Seifert surfaces, J. Knot Theory Ramifications, 17 (2008), 537-551.

図14：Y. Moriah, S. Schleimer and E. Sedgwick, Heegaard splittings of the form H+nK, Comm. Anal. Geom., 14 (2006), 215-247.

図15：Knotinfo, http://www.indiana.edu/~knotinfo/
図16：N. M. Dunfield, A knot without a nonorientable essential spanning surface, Illinois J. Math. 60 (2016), 179-184.

（総合教育研究部自然科学部門・教授　二〇一七年六月十五日）