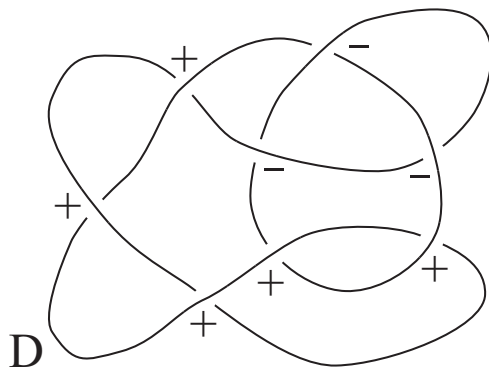


Essential state surfaces for knots and links

小沢 誠 (駒澤大学)

2006年12月21日

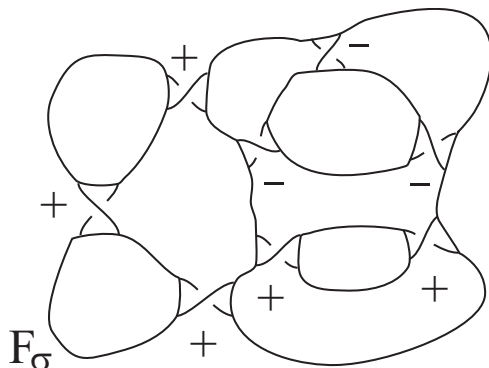
$K \subset S^3$ を結び目または絡み目、 $D \subset S^2$ を正則表示、 $\sigma: \{D \text{ の交点} \} \rightarrow \{+, -\}$ をステイトとする。



σ に従って、(局所的に向きを付けたときの交点の符号とその向きに沿ったスムージングに一致するように) 各交点でスムージングを行う。



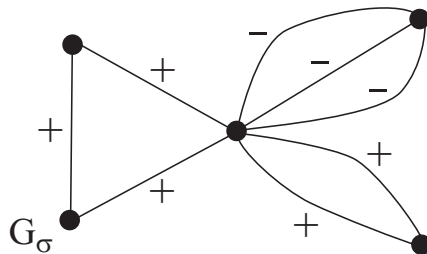
このとき、 S^2 上にいくつかのループができる。各々のループに、互いに交わらないように S^2 の下側にディスクを張る。そして、境界が K となるように、半捻りのバンドを付けて得られる曲面を σ -state surface といい、 F_σ で表す。¹



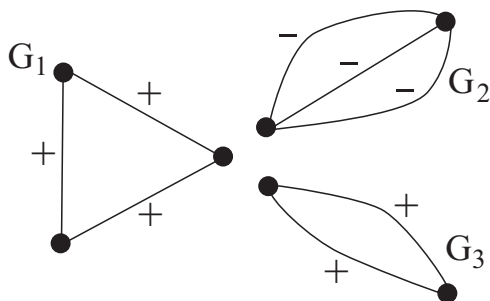
いくつかのループに、 S^2 の上側にディスクを張って曲面を得ることもできる。

¹Jozef Przytycki 氏も独立にこの定義に辿り着いている。http://xxx.lanl.gov/abs/math.GT/0607326 の 10 ページ下脚注を参照のこと。

F_σ のディスクを頂点に、半捻りのバンドを符号付きの辺に対応させ、符号付きグラフ G_σ を得る。



切断点を持たない連結なグラフをブロックという。 G_σ はいくつかの極大なブロックへ一意的に分解される。



定義

D が σ -adequate $\iff G_\sigma$ がループを持たない

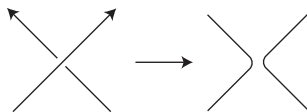
定義

D が σ -homogeneous $\iff G_\sigma$ の各ブロックにおいて、全ての辺が同じ符号を持つ

Remark. 全ての結び目の任意の正則表示 D は、ある σ に対して σ -adequate であり、また、別の σ' に対して σ' -homogeneous である。

以下、ある一つの σ に対して、 σ -adequate かつ σ -homogeneous である正則表示 D を考える。

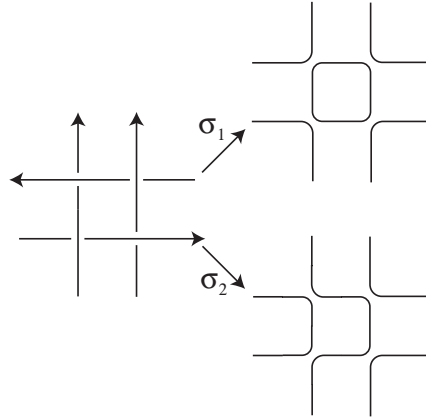
positive diagram D に対して、ステイト σ が存在して、 D は σ -adequate かつ σ -homogeneous である。



このとき、 F_σ は canonical Seifert surface である。

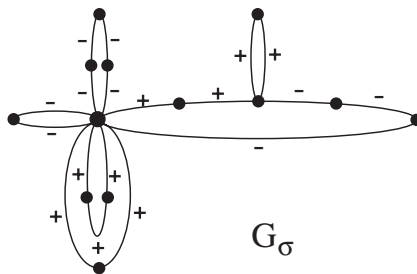
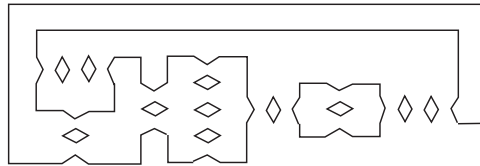
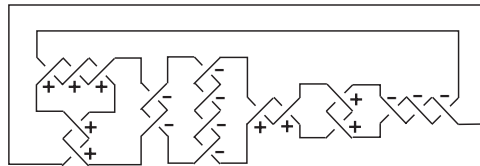
Remark. F_σ が orientable ならば、 D は σ -adequate である。

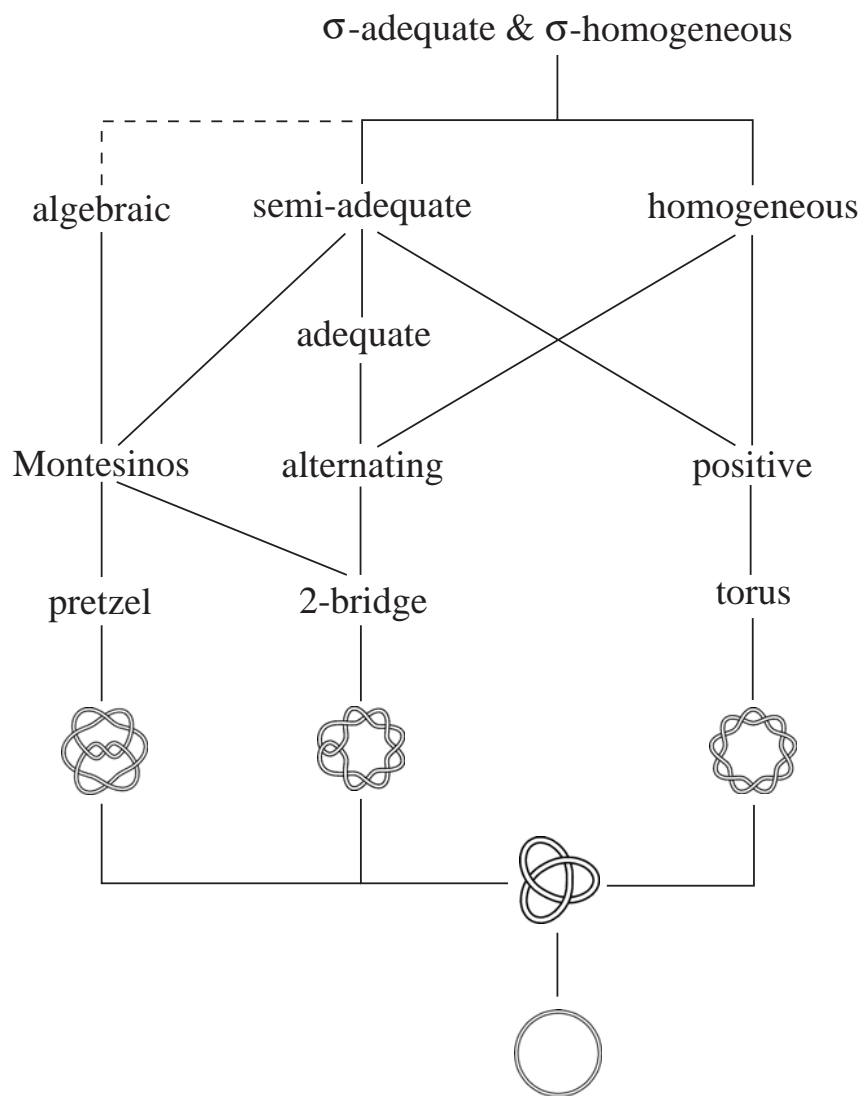
alternating diagram D に対して、少なくとも二つのステイト σ_1, σ_2 が存在して、 D は σ_i -adequate かつ σ_i -homogeneous ($i = 1, 2$) である。



このとき、 F_{σ_1} は non-orientable checkerboard surface、 F_{σ_2} は canonical Seifert surface である。

各 weight の絶対値が 2 以上の arborescent link は、 σ -adequate かつ σ -homogeneous diagram を持つ。





algebraic、arborescent、semi-adequate、homogeneous link については、それぞれ以下の論文を参照して下さい。

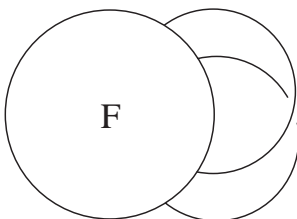
- J. H. Conway, *An enumeration of knots and links and some of their related properties*, In Computational Problems in Abstract Algebra, Proc. Conf. Oxford 1967 (Ed. J. Leech), Pergamon Press, New York, 1970, 329-358.
- D. Gabai, *Genera of the Arborescent Links*, Memoirs of the American Mathematical Society, **339**, 1986.
- W. B. R. Lickorish and M. B. Thistlethwaite, *Some links with non-trivial polynomials and their crossing numbers*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 527-539.
- P. R. Cromwell, *Homogeneous links*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989) 535-552.

M を向き付け可能コンパクト 3次元多様体、 F を M に適切に埋め込まれたコンパクト曲面 ($\neq S^2$)、 i を包含写像 $F \subset M$ とする。

定義

F が π_1 -essential \iff 次が成り立つ

- π_1 -injective ($i_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ が injective)
- ∂ - π_1 -injective ($i_* : \pi_1(F, \partial F) \rightarrow \pi_1(M, \partial M)$ が injective)
- not ∂ -parallel



π_1 -injective, not ∂ -parallel, but not ∂ - π_1 -injective in $M = E(\partial F)$

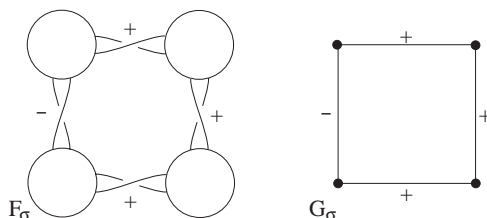
定理 1

D が σ -adequate かつ σ -homogeneous $\Rightarrow F_\sigma$ は π_1 -essential

Remark. F_σ が π_1 -essential $\iff F_\sigma \tilde{\times} \partial I$ が essential

従って、 F_σ が non-orientable のとき、 $\partial F_\sigma \tilde{\times} \partial I$ は boundary slope を与える。

Remark. F_σ が π_1 -essential ならば、 D は σ -adequate であるが、 σ -homogeneous であるとは限らない。



D : σ -adequate, not σ -homogeneous
 F_σ : π_1 -essential annulus

Remark. D が σ -adequate かつ σ -homogeneous ならば、

- F_σ が向き付け可能のとき、 F_σ は最小種数のザイフェルト曲面である。²
- F_σ が向き付け不可能のとき、 F_σ は π_1 -essential non-orientable surface の中で、最小ベッチ数の曲面であると予想される。³

Remark. 任意の結び目 K について、nugatory crossing を持たない σ -adequate かつ σ -homogeneous diagram は有限個と思われる。

²Gabai の定理 (*The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Contemp. Math. **20** (1983) 131–143.) 又は、Cromwell の結果 (*Homogeneous links*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989) 535–552.) から従う。

³講演後、平澤美可三氏に、異なる連分数展開 $[3, 2, 2, 3] = [2, -3, 2]$ を持つ 2-bridge link が反例になることを教えて頂きました。

結び目または絡み目 K の性質を、 K の正則表示 D から判定できるか？

- 分離性 (splittability)
- 自明性 (triviality)
- 素性 (primeness)
- サテライト性 (satelliteness)
- ファイバー性 (fiberness)
- タングル分解性 (tangle decomposability)

定理 2

D が σ -adequate かつ σ -homogeneous で、nugatory crossing を持たないとする。このとき、

1. K が自明 $\iff D$ が自明
2. K が分離的 $\iff D$ が分離的
3. K が素 $\iff D$ が素

F : spanning surface for K

$S^3 = B_1 \cup_S B_2$ s.t. $F \cap S$ は一枚の disk

$F_1 = F \cap B_1$ 、 $F_2 = F \cap B_2$ とおく。このとき、 F は F_1 と F_2 に村杉分解されたといい、 $F = F_1 * F_2$ と表す。逆に、 F は F_1 と F_2 から村杉和で得られたという。

Key Lemma

F_1, F_2 が π_1 -essential $\implies F_1 * F_2$ は π_1 -essential

Proof of Key Lemma

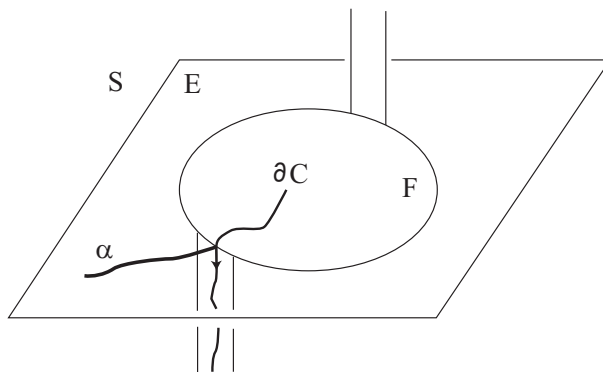
$S^3 = B_1 \cup_S B_2$

$F = F_1 * F_2$

C : compressing disk for $F \tilde{\times} \partial I$

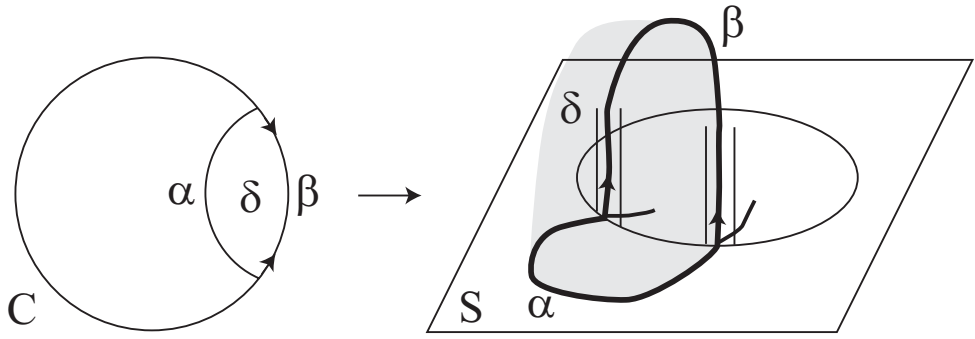
$E = cl(S - F)$

∂C 上で、 $\partial(C \cap E)$ の各点に $F \cap S$ から E へ局所的に向きを付ける。

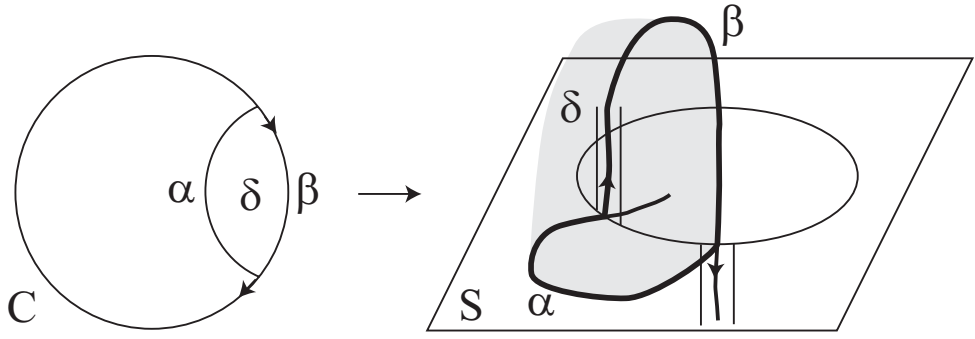


Claim

$C \cap E$ の各 arc は、その境界において、同調する向きを持つ。さらに、 $C - E$ の各 subdisk は、source を持つ。

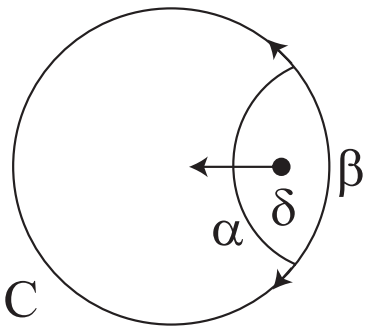


δ は F_1 の compressing disk に拡張する

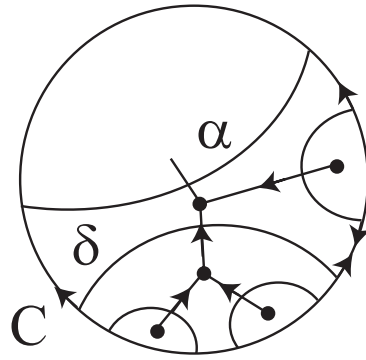


δ は F_1 の ∂ -compressing disk に拡張する

従って、outermost disk については、同調する向きを持ち、source がある。



帰納法により、 $C \cap E$ の各 arc は同調する向きを持ち、 $C - E$ の全ての subdisk は source を持つ。



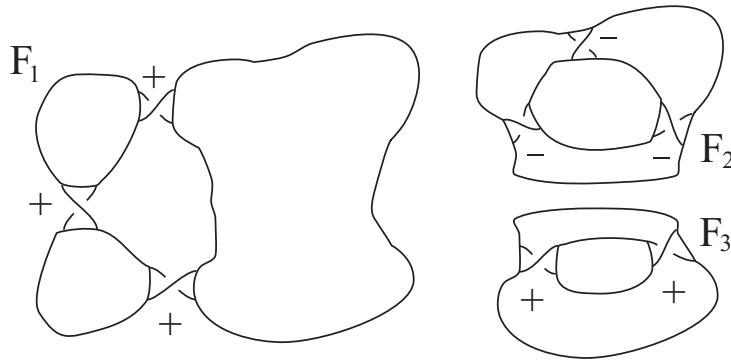
Claim より、 C 上の dual graph は oriented cycle を持つ。
 C 上作られるグラフは木であるから、これは不可能である。

定理 1 の証明

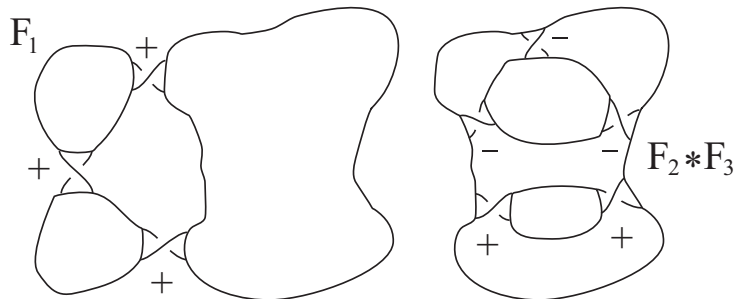
Menasco-Thistlethwaite, 1993

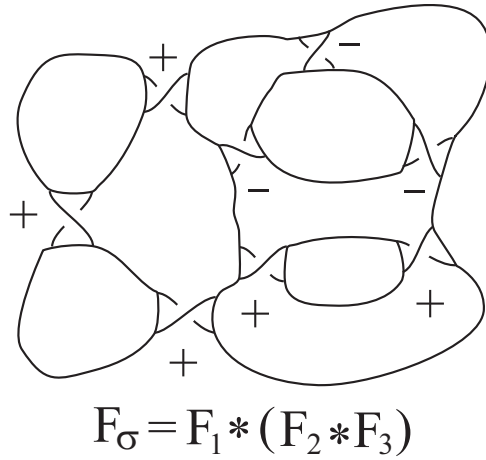
D : reduced, prime, alternating diagram \Rightarrow checkerboard surface is π_1 -essential

より、 G_σ の各ブロックに対応する曲面は π_1 -essential である。



Key Lemma より、これらの曲面を村杉和して得られる曲面 F_σ は π_1 -essential である。





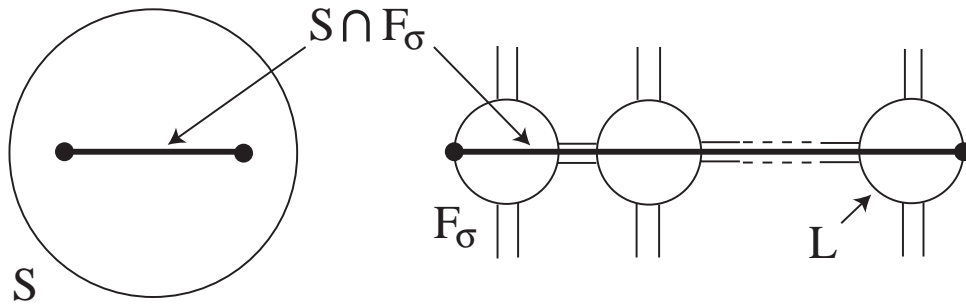
定理 2 の証明の概略

定理 2 の 1 と 2 は、 F_σ が π_1 -essential であることから従う。

定理 2 の 3 は、 σ -state surface F_σ と decomposing sphere S を考える。

F_σ は π_1 -essential であるから、 $S \cap F_\sigma$ は一本の arc と仮定して良い。

$\partial S \cap F_\sigma$ の 1 点を含む loop を L とする。

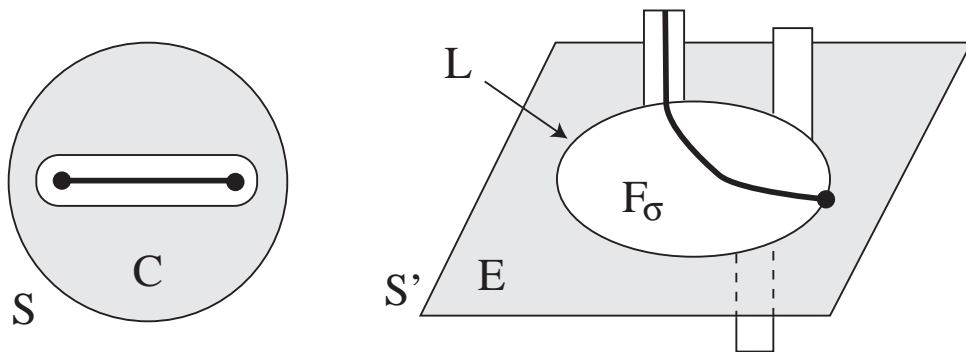


F_σ の L に沿った村杉分解を与える球面を S' とする。

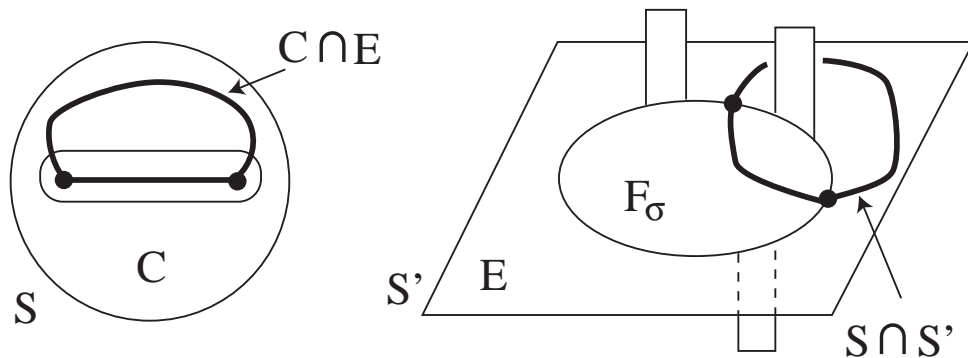
$$S^3 = B_1 \cup_{S'} B_2$$

$$F_\sigma = F_1 * F_2$$

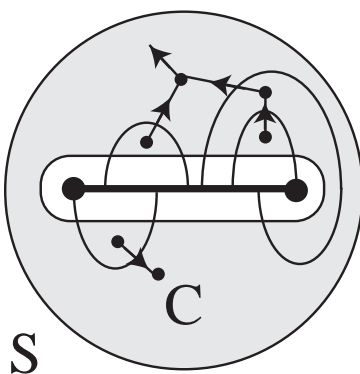
$C = cl(S - N(S \cap F_\sigma))$ と $E = cl(S' - F_\sigma)$ の交わりを考える。



$C \cap E$ が一本の arc で、 $S \cap S'$ が一本の loop である場合、 S は正則表示 D の分解を与える。



それ以外の場合は、 $S \cap F_\sigma$ の交わりを減らせるか、Key Lemma と同様に矛盾を導ける。



Problem.

1. σ -adequate かつ σ -homogeneous diagram を持つ絡み目の分類
2. σ -adequate かつ σ -homogeneous diagram の有限性
3. σ -state surface F_σ の種数 (ベッチ数) 最小性⁴
4. サテライト性、ファイバー性、タングル分解性の決定
5. ステイトを介した不変量との関係

Preprint.

- *Essential state surfaces for knots and links*, available in <http://arxiv.org/abs/math.GT/0609166>.

⁴講演後、平澤美可三氏に、異なる連分数展開 $[3, 2, 2, 3] = [2, -3, 2]$ を持つ 2-bridge link が反例になることを教えて頂きました。